



TITLE:

同変写像のボルディズム群 (同変ホモトピー論)

AUTHOR(S):

鎌田, 正良

CITATION:

鎌田, 正良. 同変写像のボルディズム群 (同変ホモトピー論). 数理解析研究所講究録 1978, 319: 39-53

ISSUE DATE:

1978-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/103992>

RIGHT:

同変写像のホルディスム群

九大 教養 鎌田正良

§ 1. 序

向きづけの無い可微分多様体を考える. m 次元閉多様体から n 次元閉多様体への連続写像 $\alpha_i = (M_i^m \xrightarrow{f_i} N_i^n)$, $i=1, 2$ に対して, 連続写像 $F: W \rightarrow B$ が

$$(1) \quad \partial W = M_1 \cup M_2, \quad \partial B = N_1 \cup N_2, \quad \cup \text{ は disjoint sum}$$

$$(2) \quad F|_{M_i} = f_i$$

をみたすように存在するとき, α_1 と α_2 はボルダントであると言ひ, この同値関係による類別の類を $[\alpha]$ で表わす. 和は

$$[M_1 \xrightarrow{f_1} N_1] + [M_2 \xrightarrow{f_2} N_2] = [M_1 \cup M_2 \xrightarrow{f_1 \cup f_2} N_1 \cup N_2],$$

$$(\text{但し, } f_1 \cup f_2(x) = f_i(x) \text{ if } x \in M_i, i=1, 2)$$

なる写像の disjoint sum で定義する. このようにして得られるアーベル群を $\mathcal{H}_{m,n}$ によって表わす. $\mathcal{H}_{m,n}$ の構造は, Stong [8] によって完全に決定されている.

\mathcal{F} を有限群 G の部分群の族で「 $H \in \mathcal{F}$, $g \in G \Rightarrow gHg^{-1} \in \mathcal{F}$, $K \subset H (K \in \mathcal{F}) \Rightarrow K \in \mathcal{F}$ 」をみたすものとする. $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ を

G の部分群の族の組とする. $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ 自由多様体 (M, φ) , $\varphi: G \times M \rightarrow M$, とは, M の各点 x のイソトロピー群 G_x は \mathcal{F} に属し, $x \in \partial M \Rightarrow G_x \in \mathcal{F}'$ をみたすものである. m 次元及び n 次元 $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ 自由多様体の間の同変写像 $\alpha_i = ((M_i^m, \varphi_i) \rightarrow (N_i^n, \psi_i))$ $i=1, 2$ に対して, 同変写像 $F: (W, W^+, \Phi) \rightarrow (B, B^+, \Psi)$ が存在し次をみたす時 α_1 と α_2 は同値とする.

$$(1) \quad \partial W = M_1 \cup M_2 \cup W^+, \partial B = N_1 \cup N_2 \cup B^+, W^+, B^+ \text{ は部分多様体}$$

$$(2) \quad x \in W (\in B) \Rightarrow G_x \in \mathcal{F}, x \in W^+ (\in B^+) \Rightarrow G_x \in \mathcal{F}'$$

$$(3) \quad \Phi|_{G \times M_i} = \varphi_i, \Psi|_{G \times N_i} = \psi_i, F|_{M_i} = f_i$$

このような類別によつて与えられるボルディスム群を $\mathcal{R}_{m,n}^G(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ で表わす. G 多様体のボルディスム群 [10] と同様, $\mathcal{F}'' \subset \mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ に対して, 次の exact triangle が得られる.

$$\mathcal{R}_{*,*}^G(\mathcal{F}', \mathcal{F}'') \longrightarrow \mathcal{R}_{*,*}^G(\mathcal{F}, \mathcal{F}'')$$

$$\nwarrow \quad \nearrow$$

$$\mathcal{R}_{*,*}^G(\mathcal{F}, \mathcal{F}'), \quad [11].$$

[11] で Stong は $\mathcal{F} = \{\mathbb{Z}_2, \{1\}\}$, $\mathcal{F}' = \{\{1\}\}$, $\mathcal{F}'' = \emptyset$ に対して $\mathcal{R}_{*,*}^{\mathbb{Z}_2}(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$, $\mathcal{R}_{*,*}^{\mathbb{Z}_2}(\mathcal{F}', \mathcal{F}'')$ の構造について, homotopy representation を示している.

さて, この論文 [11] でみられるようなボルディスム論の展開として, 次の問題が考えられる.

[P-1] 有限群の準同型写像 $\rho: G_1 \rightarrow G_2$ に対して, G_i 多様体 (M_i, φ_i) $i=1, 2$ の同変写像 $f: (M_1, \varphi_1) \rightarrow (M_2, \varphi_2)$ ($f(g_i x) = \rho(g_i) f(x)$) の分類せよ.

[P-2] \mathbb{Z}_2 -同変写像 $f: (M, \varphi) \rightarrow (N, \psi)$ に対して, 固定点集合への制限 $f_F: M_F \rightarrow N_F$ と f との関係を調べよ.

この小文では, 上述の問題に関する若干の試みと, それから派生するいくつかの問題を報告する.

§2. \mathbb{Z}_2 -同変写像の固定点集合への制限

リーマン計量を保存する \mathbb{Z}_2 -作用を有する m 次元多様体の間の同変写像 $f: (M^m, \varphi) \rightarrow (N^m, \psi)$ に対して次の事を仮定しよう. f は可微分写像であって, 各々の固定点集合を $M_F = \cup F_i$, $N_F = \cup F'_i$ (F_i, F'_i は i 次元成分) であらわすとき, f の微分写像 df は F_i の法ベクトル束 ν_i から F'_i の法ベクトル束 ν'_i へのバンドル写像を誘導し, $v, w \in E(\nu_i)$ に対し,

$$\langle v, w \rangle_M = \langle df v, df w \rangle_N$$

を満たすものとする. \langle, \rangle はリーマン計量を表わす. ν_i と一次元 trivial 束 θ' の Whitney 和 $\nu_i \oplus \theta'$ 上に \mathbb{Z}_2 -作用を,

$$g \cdot (v, w) = (g \cdot v, -w) \quad g \in \mathbb{Z}_2 \text{ は生成元}$$

とすれば, 同伴球面バンドル $S(\nu_i \oplus \theta')$ に \mathbb{Z}_2 作用が導入され

df より, \mathbb{Z}_2 -自由多様体の間の同変写像 $\bar{f}_i: S(\nu_i \oplus \theta^1) \rightarrow S(\nu'_i \oplus \theta^1)$ を得る. (cf. [4], §27)

命題 2.1. $\mathcal{N}_{n,m}$ において,

$$[M^m \xrightarrow{f} N^m] = \sum [S(\nu_i \oplus \theta^1)/\mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\bar{f}_i} S(\nu'_i \oplus \theta^1)/\mathbb{Z}_2]$$

m 次元多様体, A, B の間の写像 $f: A \rightarrow B$ に対して, $[A]^*$, $[B]^*$ を \mathbb{Z}_2 -係数コホモロジーでの基本類とすると, f の位数 $\sigma(f)$ を次の式で定義する. $f^*[B]^* = \sigma(f)[A]^*$.

定理 2.2. この節の仮定の下で, $f_i = f|F_i$ とし, $\chi(\cdot)$ で \mathbb{Z}_2 -係数コホモロジーに簡約されたオイラー数とすると

$$\sigma(f) \chi(N^m) = \sum \sigma(f_i) \chi(F'_i)$$

証明は $\sum [S(\nu_i)/\mathbb{Z}_2 \rightarrow S(\nu'_i)/\mathbb{Z}_2] = 0$ 及び命題 1.1 が用いられ, Stong [8] による写像 $f: A \rightarrow B$ のホルディスム不変量 $\langle W_\omega(B) f_* (W_{\omega_1}(A)) \cdots f_* (W_{\omega_r}(A)), [B] \rangle$, ($f_*: H^*(A) \rightarrow H^*(B)$ は Umkehrung homomorphism) と k 次元ベクトル束 ξ^k の同位射影空間バンドル $P(\xi^k)$ に対する特性類の関係式 $W_{n+k-1}(P(\xi^k)) = k \binom{k-1}{n} \pi^* W_n(X)$ [2] (π は $P(\xi^k)$ 上の標準直線束の 1 次 Whitney 類, $\xi \xrightarrow{\pi} X$ は n 次多様体 X 上のバンドル) を利用する.

この結果で、 f を恒等写像とすれば、 \mathbb{Z}_2 -多様体 V の固定点集合 F に対しての次の式を得る. ([4, (27.2)], [17])

$$\chi(F) = \chi(V)$$

自然に次の問題が考えられる.

[P-3] ボルディスム不変量を利用して、一般次元の場合の写像 $f: M^m \rightarrow N^n$ とその固定点集合への制限の関係を調べよ.

§3. ファイバー空間に附随した写像のボルディスム群

この節では群作用が自由な場合を考える. 有限群の準同型写像 $p: H \rightarrow G$ に対し, 自由 H 多様体 (M^m, φ) から自由 G 多様体 (N^n, ψ) への同変写像

$$f: M^m \longrightarrow N^n, \quad f(h \cdot x) = p(h)f(x), \quad h \in H, x \in M$$

を (m, n) 次元の $(H \curvearrowright G)$ 同変写像と呼ぶ. 閉多様体間の (m, n) 次元 $(H \curvearrowright G)$ 同変写像 $(M_i, \varphi_i) \xrightarrow{f_i} (N_i, \psi_i) \quad i=1, 2$ がボルダントであるとは, 適当なコンパクト多様体間の $(m+1, n+1)$ 次元 $(H \curvearrowright G)$ 同変写像 $F: (W, \Phi) \rightarrow (B, \Psi)$ が存在し

$$(1) \quad \partial W = M_1 \cup M_2, \quad \partial B = N_1 \cup N_2$$

$$(2) \quad \Phi|_{H \times M_i} = \varphi_i, \quad \Psi|_{G \times N_i} = \psi_i, \quad F|_{M_i} = f_i$$

をみたすときに言う. この類別で得られるボルディスム群を

$$\mathcal{N}_{m,n}(H \curvearrowright G)$$

と表わす. これを解析するために次の3つのホルディスム群を用意しよう.

(I) 位相空間 X に対して, m 次元多様体 M , n 次元多様体 N との合成写像 $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} X$ を考える. 閉多様体との合成写像 $M_i \xrightarrow{f_i} N_i \xrightarrow{g_i} X$, $i=1, 2$ がホルダントであるとは, 適当なコンパクト多様体との合成写像 $W \xrightarrow{F} B \xrightarrow{G} X$ が存在し

$$(1) \partial W = M_1 \cup M_2, \quad \partial B = N_1 \cup N_2 \quad (2) F|_{M_i} = f_i, \quad G|_{N_i} = g_i$$

をみたすことである. このホルディスムによる類別から得る群を $\mathcal{H}_{m,n}(X)$ と表わす.

(II) 位相空間 X, Y に対し, m 次元 M , n 次元 N なる多様体との図式 $X \xleftarrow{g} M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{h} Y$ を考える. 閉多様体との図式 $X \xleftarrow{g_i} M_i \xrightarrow{f_i} N_i \xrightarrow{h_i} Y$, $i=1, 2$ がホルダントとは, 適当なコンパクト多様体との図式 $X \xleftarrow{G} W \xrightarrow{F} B \xrightarrow{H} Y$ が存在して

$$(1) \partial W = M_1 \cup M_2, \quad \partial B = N_1 \cup N_2$$

$$(2) F|_{M_i} = f_i, \quad G|_{M_i} = g_i, \quad H|_{N_i} = h_i$$

をみたすことである. この類別で与えられるホルディスム群を $\mathcal{H}_{m,n}(X; Y)$ と表わす.

(III) 写像 $g: X \rightarrow Y$ に対して, m 次元 M , n 次元 N なる多様体との可換な図式 $M \xrightarrow{g} X$ を考える.

$$\begin{array}{ccc} f \downarrow & & \downarrow g \\ N & \xrightarrow{h} & Y \end{array}$$

閉多様体との可換な図式 $M_i \xrightarrow{g_i} X$, $i=1, 2$ がボルダレットと

$$\begin{array}{ccc} f_i \downarrow & & \downarrow g \\ N_i & \xrightarrow{h_i} & Y \end{array}$$

は, コンパクトな多様体との可換図式

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{G} & X \\ F \downarrow & & \downarrow g \\ B & \xrightarrow{H} & Y \end{array}$$

が存在して,

$$(1) \partial W = M_1 \cup M_2, \quad \partial B = N_1 \cup N_2$$

$$(2) F|_{M_i} = f_i, \quad G|_{M_i} = g_i, \quad H|_{N_i} = h_i$$

をみたすことである. このボルディスム群を $\mathcal{C}_{m,n}(X \xrightarrow{g} Y)$ と表わす. これは Stong によって考えられたものである.

命題 3.1. ([117, [5]]) $\mathcal{C}_{m,n}(G \xrightarrow{id} G) \cong \mathcal{C}_{m,n}(BG)$

但し, BG は G の分類空間を表わす.

命題 3.2. $\mathcal{C}_{m,n}(H \xrightarrow{f} G) \cong \mathcal{C}_{m,n}(BH \xrightarrow{Bf} BG)$

3.2 の同型対応は $[(M, \varphi) \xrightarrow{f} (N, \psi)]$ に対して,

$$\begin{array}{ccc} M/H & \xrightarrow{\bar{g}} & BH \\ \bar{f} \downarrow & & \downarrow Bf \\ N/G & \xrightarrow{\bar{h}} & BG \end{array} \quad \begin{array}{l} \bar{f} \text{ は商写像} \\ \bar{g}, \bar{h} \text{ は } M \rightarrow M/H, N \rightarrow N/G \\ \text{の分類写像} \end{array}$$

のボルディスム類を対応させる.

以上のことから [P-1] を調べるためには次の問題を解けば

よいことになる (これは Strong の示唆による.) .

[P-4] ファイバー空間 $E \xrightarrow{q} X$ に関する写像のホルディスム $\mathcal{H}_{m,n}(E \xrightarrow{q} X)$ を決定せよ.

命題 3.3. $\mathcal{H}_{m,n}(X \times Y \xrightarrow{p} Y) \cong \mathcal{H}_{m,n}(X; Y)$

この同型は, 可換図式 $M \xrightarrow{q} X \times Y$ の類に対して,

$$\begin{array}{ccc} & & \\ \downarrow f & & \downarrow p \\ N & \xrightarrow{h} & Y \end{array}$$

$[X \xleftarrow{p \circ q} M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{h} Y]$ を対応させることによって得る.

[P-4] の問題については筆者は, 射影 $p: X \times Y \rightarrow Y$ の場合しかくわしく情報を得てない. 即ち $\mathcal{H}_{m,n}(X; Y)$ 及び $\mathcal{H}_{m,n}(X)$ の構造が現在まで得られているところである.

$BO(n)$ 上の普遍束 γ_n 及び trivial k 次元束 θ^k 及び位相空間 X に対して, $\gamma_n \times \theta^k \times X \rightarrow \gamma_{n+k} \times X$ なるバンドル写像が与えられて, これより Thom complex の間の写像

$$MO(n) \wedge S^k \wedge X^+ \rightarrow MO(n+k) \wedge X^+$$

を誘導し, この adjoint map $MO(n) \wedge X^+ \rightarrow \Omega^k(MO(n+k) \wedge X^+)$ より自然に $\Omega^k(MO(n) \wedge X^+) \rightarrow \Omega^{k+l}(MO(n+k) \wedge X^+)$ が導かれる. これによって direct system $\{\Omega^k(MO(k+n) \wedge X^+), k\}$ が構成される. この system によって, 次の同型を得る.

命題 3.4. ([11], [5]) $\mathcal{R}_{m,n}(X) \cong \varinjlim_k \mathcal{R}_n(\Omega^k(MO(n-m+k) \wedge X))$

命題 3.5. $\mathcal{R}_{m,n}(X; Y) \cong \varinjlim_k \mathcal{R}_n(\Omega^k(MO(n-m+k) \wedge X^+) \times Y)$

3.5の対応: $\alpha = [X \xleftarrow{g} M^m \xrightarrow{f} N^n \xrightarrow{h} Y]$ (f は可微分写像としてよい)に embedding $M \xrightarrow{e} S^k$ をとり, $M \xrightarrow{e \times f} S^k \times N^n$ の法ベクトル束を考えるとその分類写像を \tilde{f} とし, バンドル射影を π で表す. このとき次の写像が導かれる.

$\tilde{f}: S^k \times N^n \xrightarrow{e} D(\nu)/S(\nu) \xrightarrow{\tilde{f} \times g \cdot \pi} D(\gamma_{n+k-m}) \times X / S(\gamma_{n+k-m}) \times X$
 $D(\cdot), S(\cdot)$ は各々 disk (sphere) バンドルを表す.

\tilde{f} の adjoint map を $\tilde{f}: N^n \rightarrow \Omega^k(MO(n-m+k) \wedge X^+)$ とすれば
 $\Phi(\alpha) = [N^n \xrightarrow{\tilde{f} \times h} \Omega^k(MO(n-m+k) \wedge X^+) \times Y]$ で与えられる.

§4. $\varinjlim_k \mathcal{R}_*(\Omega^k MO(k+n-m) \wedge X^+)$ 及び特性数

前節でみたように $\mathcal{R}_{*,*}(X \times Y \xrightarrow{p} Y)$ は $\mathcal{R}_{*,*}(X; pt) \cong \varinjlim_k \mathcal{R}_*(\Omega^k(MO(k+n-m) \wedge X^+))$ が実質的に重要である. この構造を知るために次の重要な定理を思い起そう.

[Milnor-Moore [6]] A を体 F 上の connected Hopf algebra とし, M を left A -module で counit U をもつような F 上の connected coalgebra とする. diagonal map $\Delta: M \rightarrow M \otimes M$ が A -homomorphism であって, $A \rightarrow M (a \mapsto a \cdot U)$ が単射

ならば M は free A -module である。

定理 4.1. X を H -空間で finite type の CW -complex とすると十分大きな k に対して,

$$\mathcal{H}_{m,n}(X; pt) \cong \sum_{i+j=n} \mathcal{H}_i \otimes \tilde{H}_j \left(\prod_{i=0}^{-m+n+k-2} K(\mathcal{H}_i(X), n-m+i); \mathbb{Z}_2 \right)$$

証明は Milnor-Moore の定理にある counit U の存在と, $a \mapsto a \cdot U$ が単射であることを $\tilde{H}^*(MO \wedge X^+)$ に対して調べるのが本質的である。但し A として Steenrod algebra \mathcal{U}_2 をとる。 $\tilde{H}^*(MO; \mathbb{Z}_2)$ については counit は Thom 類によって表現されるもの U であり, $a \mapsto a \cdot U$ が単射であることは [13] で示されている。 $\tilde{H}^*(MO \wedge X^+; \mathbb{Z}_2)$ の場合も counit として $U \otimes 1$ をとればよい。

さらに, 一般にして, 次の問題が生じる。

[P-5] X を一般として $\varinjlim_k \tilde{H}_n(\Omega^k(MO(k+n-m) \wedge X^+))$ の構造を調べよ。

$\varinjlim_k \tilde{H}_n(\Omega^k(MO(k+n-m); \mathbb{Z}_2))$ は Stong [8] によって, $\varinjlim_k \tilde{H}_*(\Omega^{2k} MU(n+k); \mathbb{Z})$ については, Ravenel - Wilson [7] によって研究されている。

この類に属する結果としては, Immersion のボルディスム群 $I(m, k)$ について

定理 4.2. [12] $I(m, k) \cong \mathcal{H}_{m+k}(\Omega MO(k))$

但し, $QMO(k) = \varinjlim_{r \geq k} \Omega^r \Sigma^r MO(k)$.

がある. さらに Immersion のボルテイスムについては,
Uchida [14] Wells [15] 等の研究がある.

特性数について述べることにしよう. 有限型 CW-complex
 X, Y に対して, $\alpha = [X \xleftarrow{g} M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{h} Y] \in \mathcal{RC}_{m,n}(X:Y)$
の特性数を次の式で与える.

$$\langle g^*(x) f^* h^*(y) f_* f_*(W_{\omega_1}(M)) \cdots f_* f_*(W_{\omega_r}(M)) W_{\omega_r}(M) f^* W_{\omega}(N), [M] \rangle$$

$x \in H^*(X; \mathbb{Z}_2), y \in H^*(Y; \mathbb{Z}_2)$, f_* は Umkehrung homomorphism.

定理 4.3. [5] $\alpha = 0 \iff \alpha$ の任意の特性数 $= 0$

証明は命題 3.5, 定理 3.1 を用いて示すことができる.

Embedding のボルテイスム群は $\mathcal{RC}_{n+k}(MO(k))$ で表現される.
例えば $\mathcal{RC}_{n+k}(MO(k)) \rightarrow \mathcal{RC}_{n,n+k}$ の像を調べたものとして Brown [3] の次の定理がある.

定理 4.4. [3] $f: M^n \rightarrow N^{n+k}$ が embedding とボルタントであるための必要十分条件は次の 2 条件をみたす事である.

$$(i) \langle f^* W_{\omega}(N) \cdot W_{\omega_1}(M) \cdots W_{\omega_r}(M) (\bar{W}_i(f))^{r-1}, [M] \rangle = 0$$

if $r > 1$, $i > k$.

50

$$\begin{aligned}
 (ii) \quad & \langle W_\omega(N) f_* W_{\omega_1}(M) \cdots f_* W_{\omega_r}(M), [N] \rangle \\
 &= \langle f^* W_\omega(N) W_{\omega_1}(M) \cdots W_{\omega_r}(M) (\bar{W}_f(f))^{r-1}, [M] \rangle \\
 &\text{但し, } \bar{W}(f) = \bar{W}(M) f^* W(N) \\
 &\bar{W}(M) W(M) = 1
 \end{aligned}$$

この定理から類推される問題として,

[P-6] $I(m, n) \rightarrow \mathcal{R}_{m, n}$ の像を調べよ.

§5. $\mathcal{R}_{m, n}(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}_q)$ について

$\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}_q$ なる自然な射影に対する自由同変字像について述べることにする. 定理 4.1 と命題 3.5 を調べて具体的な $\mathcal{R}_{*, *}(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}_q)$ の幾何学的生成元を知ることが目的である.

命題 5.1. q が奇数のとき

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{R}_{m, n}(\mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}_2) \\
 & \cong \sum_{i=0}^m \mathcal{R}_{m-i, n-i}([(\mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_q \times S^i) \xrightarrow{\pi} (\mathbb{Z}_2, S^i)])
 \end{aligned}$$

但し, $(\mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_q \times S^i)$ は \mathbb{Z}_q が \mathbb{Z}_q に群作用で \mathbb{Z}_2 は S^i に対称点対応の作用で与えられる $\mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_2$ -自由多様体, (\mathbb{Z}_2, S^i) は対称点対応による \mathbb{Z}_2 -多様体を示す.

命題 5.2. p, q が奇数のとき,

$$\begin{aligned} & \mathcal{N}_{m,n}(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}_q) \\ & \cong \mathcal{N}_{m,n}([(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q, \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q) \xrightarrow{\pi} (\mathbb{Z}_q, \mathbb{Z}_q)]) \end{aligned}$$

命題 5.3. $n > 2m+2$ のとき

$$\begin{aligned} & \mathcal{N}_{m,n}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}_2) \\ & \cong \sum_{\substack{s+l+k=m \\ t+l+k=n}} \mathcal{N}_{s,t}([(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, S^l \times S^k) \xrightarrow{\pi \times \text{id}} (\mathbb{Z}_2, P^l \times S^k)]) \end{aligned}$$

但し, $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, S^l \times S^k)$ は \mathbb{Z}_2 が各々の球に対称点対称で作用する $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -多様体, $(\mathbb{Z}_2, P^l \times S^k)$ は \mathbb{Z}_2 が S^k に対称点対称で作用する \mathbb{Z}_2 -多様体, P^l は実射影空間を示す.

[P-7] $\mathcal{N}_{*,*}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}_2)$ の生成元を決定せよ.
は残されている問題の一つである.

参考文献

- [1] A. Borel et al, Seminar on transformation in groups, Ann. Study 46. Princeton (1960)
- [2] A. Borel and F. Hirzebruch, On characteristic classes of homogeneous spaces I, Amer. J. Math. 80. 458-538
- [3] R.L. Brown, Stiefel-Whitney numbers and maps

cobordant to embeddings, Proc. Amer. Math. Soc. vol. 48. No. 1

(1975) 245-250

[4] P. E. Conner and E. E. Floyd, Differentiable Periodic maps, Ergebnisse der Mathematik und ihre Grenzgebiete Band 33

(1964)

[5] M. Kamata, A generalization of cobordism of maps

[6] J. Milnor and J. Moore, On the structure of Hopf algebras, Ann. of Math. 81. (1965) 211-264

[7] D. C. Ravenel and W. S. Wilson, The Hopf ring for complex cobordism

[8] R. E. Stong, Cobordism of maps, Topology vol. 5 (1966) 245-258

[9] R. E. Stong, Notes on Cobordism Theory, Princeton Math. notes (1968)

[10] R. E. Stong, Unoriented bordism and actions of finite groups, Mem. Amer. Math. Soc. 103. (1970)

[11] R. E. Stong, Equivariant bordism of maps, Trans. of Amer. Math. Soc. vol. 178 (1973) 449-458

[12] P. A. Schweitzer, Joint cobordism of immersions Lecture note 169 Springer Verlag (The Steenrod algebras and its applications) (1970) 267-282

- [13] R. Thom, Quelques propriétés globales des variétés différentiables, *Comment. Math. Helv.* 28 (1954) 17-86.
- [14] F. Uchida, Exact sequences involving cobordism group of immersions, *Osaka J. Math.* 6 (1969) 397-408
- [15] R. Wells, Cobordism groups of immersions, *Topology* 5 (1968) 281-294